

U. Didáctica 11: Funciones

RECUERDA

Una **correspondencia** es cualquier relación que se quiera establecer entre los elementos de dos conjuntos. El conjunto de partida se llama **conjunto inicial** y el de llegada, **conjunto final**.

Una **función** es una correspondencia entre dos conjuntos tal que a cada elemento del conjunto inicial le corresponde **un único elemento** del conjunto final.

- Los elementos del conjunto inicial forman la **variable independiente**. Se representa con una letra: x, t, \dots
- Los elementos del conjunto final forman la variable dependiente o imagen. Se representa con la letra y o como $f(x), f(t)\dots$

Las funciones expresan la relación entre dos magnitudes, y para ello se utilizan fórmulas, tablas o gráficas.

Ejemplo. Una placa fotovoltaica genera una media de 150 vatios (W) por cada metro cuadrado de superficie. Podemos expresar la relación entre los vatios y los metros cuadrados de las siguientes maneras:

Mediante una fórmula	Mediante una tabla							Con una gráfica
$y = 150 \cdot x$	m^2 (x)	1	2	3	4	5	...	10
	W (y)	150	300	450	500	750	...	1500

- El **dominio** u **origen** de una función f es el conjunto de los valores que puede tomar la variable independiente. Se suele escribir como $D(f)$
- El **recorrido** o **imagen** de una función f es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente. Se suele escribir como $R(f)$ o $Im(f)$.

Ejemplo:



La gráfica representa una función en la que la variable independiente es el tiempo y la variable dependiente es la distancia recorrida.

- El dominio de la función son los números del intervalo $[0, 20]$
- El recorrido son los números del intervalo $[0, 5]$

Ejercicios

1. En la siguiente gráfica se recogen los datos de la estatura de Sergio entre los 6 y los 14 años. Observa y contesta:



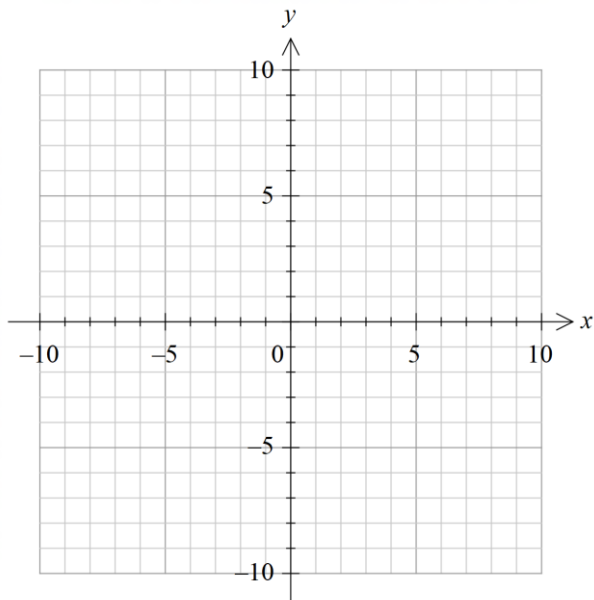
- a) ¿Cuánto medía cuando tenía 6 años? ¿Y cuando tenía 10 años?
- b) ¿A qué edad superó los 1,5 m de estatura?
- c) ¿En algún momento su estatura permanece constante?

2. Dos magnitudes están relacionadas mediante la fórmula $y = x^2 - 5$

a) Construye la tabla de valores correspondiente

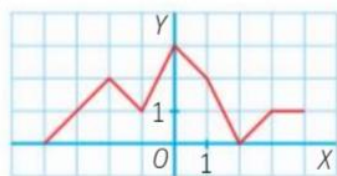
(x)	-3	-2	-1	0	1	2	3
(y)							

b) Representa la gráfica

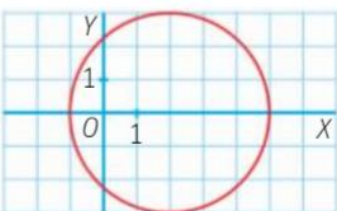


3. Indica si las siguientes gráficas representan una función. En caso afirmativo indica su dominio y recorrido.

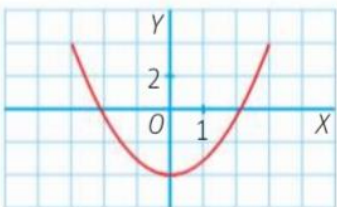
a)



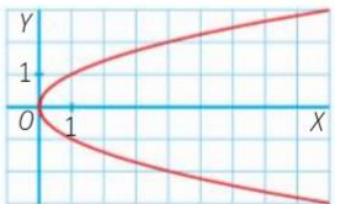
b)



c)



d)

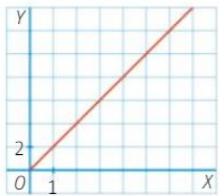
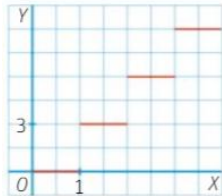


ESTUDIO GRÁFICO DE FUNCIONES

La **gráfica de una función** es la representación en los ejes de coordenadas de los puntos de la forma (x, y) , donde $y = f(x)$.

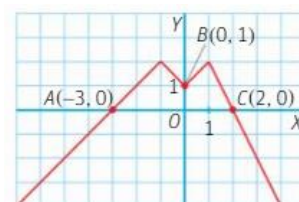
Las gráficas se estudian de izquierda a derecha, en el sentido creciente de la variable independiente.

Continuidad de una función.

Una función es continua en un intervalo si su gráfica no presenta saltos, es decir, está dibujada de un solo trazo	Una función es discontinua si presenta saltos para algún valor de la variable independiente. Los puntos en los que una función presenta saltos se llaman discontinuidades .
<p style="text-align: center;">Continua</p> 	<p style="text-align: center;">Discontinua</p> 

Puntos de corte con los ejes

- Los **puntos de corte con el eje X** tienen la coordenada y igual a cero: $(x, 0)$.
- Los **puntos de corte con el eje Y** tienen la coordenada x igual a cero: $(0, y)$.



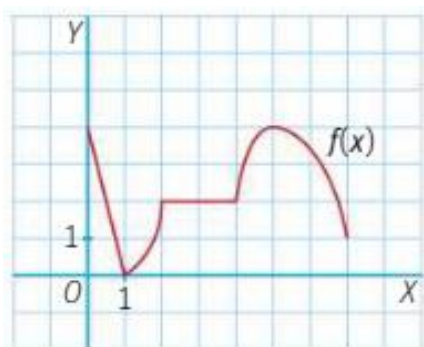
Monotonía

- Una función es **creciente** en un intervalo si al aumentar el valor de la variable independiente aumenta el valor de la variable dependiente.
- Una función es **decreciente** en un intervalo si al aumentar el valor de la variable independiente disminuye el valor de la variable dependiente.
- Una función es **constante** en un intervalo si al aumentar el valor de la variable independiente el valor de la variable dependiente se mantiene con el mismo valor.

Máximos y mínimos

- Una función continua presenta un **máximo relativo** en un punto si a la izquierda de ese punto la función crece y a la derecha decrece.
- Una función continua presenta un **mínimo relativo** en un punto si a la izquierda de ese punto la función decrece y a la derecha crece.
- Si una función tiene más de un máximo, llamamos **máximo absoluto** a aquel que tiene mayor ordenada.
- Si una función tiene más de un mínimo, llamamos **mínimo absoluto** a aquel que tiene menor ordenada.

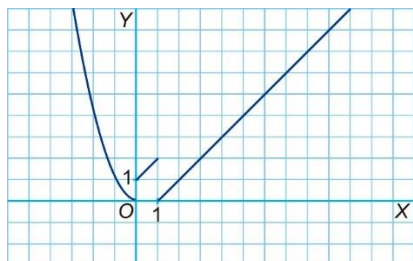
Ejemplo:



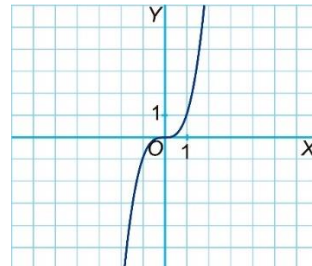
- Desde $x = 0$ hasta $x = 1$ la función es decreciente
- Desde $x = 1$ hasta $x = 2$ la función es creciente
- Desde $x = 2$ hasta $x = 4$ la función es constante
- Desde $x = 4$ hasta $x = 5$ la función es creciente
- Desde $x = 5$ hasta $x = 7$ la función es decreciente
- Los máximos y mínimos de la función son:
Máximo: $P(5, 4)$; Mínimo: $P(1, 0)$

4. Indica si las siguientes funciones son continuas o discontinuas, y determina, en su caso, los puntos de discontinuidad.

a)

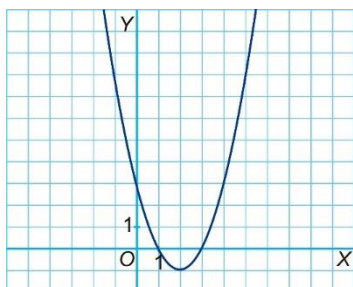


b)

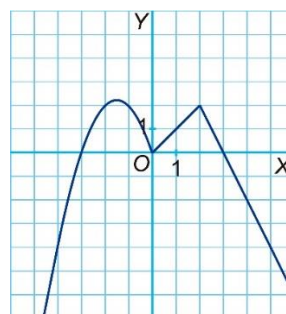


5. Calcula los puntos de corte de las siguientes funciones con los ejes de coordenadas, y determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a)

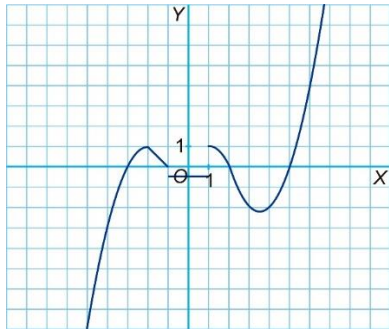


b)

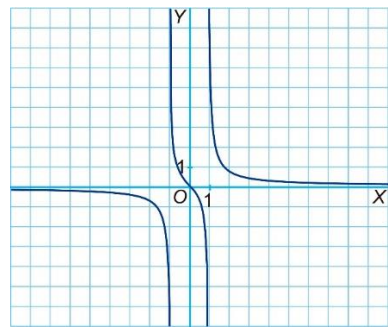


6. Estudia la continuidad, los puntos de corte con los ejes, el crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de las siguientes funciones.

a)



b)



7. Dibuja una función cuyo dominio vaya desde $x = -2$ hasta $x = 4$, tenga un máximo en $x = 0$, un mínimo en $x = 1$, y una discontinuidad en $x = 2$.

FUNCIONES LINEALES

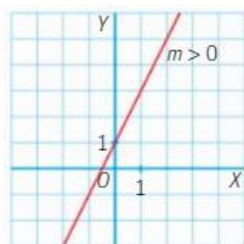
Una **función lineal** es de la forma $y = mx + n$, donde m y n son números cualesquiera. La gráfica de una función lineal es una línea recta

- m es la **pendiente** de la recta e indica su inclinación
- n es la **ordenada en el origen** e indica el punto de corte con el eje y

- La pendiente mide la inclinación de la recta. Dependiendo del signo de m , se pueden dar tres situaciones:

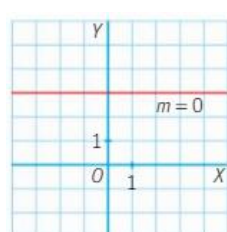
La pendiente es positiva: $m > 0$.

La recta es **creciente**



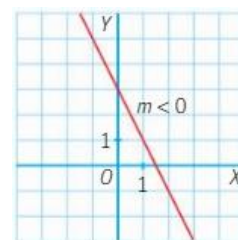
La pendiente es cero: $m = 0$.

La recta es **constante**



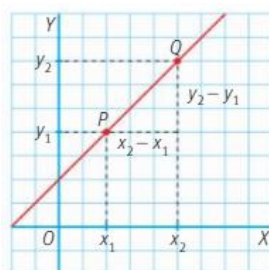
La pendiente es negativa: $m < 0$.

La recta es **decreciente**



- Dados dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, se define la **pendiente** de la recta que pasa por P y Q como :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



- Una recta del tipo $y = 2$ es paralela al eje X y representa una función.
- Una recta de ecuación $x = 2$ es paralela al eje Y , pero no representa una función.

Clasificación

- Las funciones $y = mx$, con $n = 0$, se llaman funciones de **proporcionalidad directa**. La pendiente $m \neq 0$ se llama **constante de proporcionalidad**. Su gráfica es una recta que pasa por el origen.
- Las funciones $y = mx + n$ se llaman **funciones afines** y es una forma de expresar una recta de forma explícita

Posiciones relativas

- Dos rectas son **paralelas** si tienen la misma inclinación, es decir, la **misma pendiente**. No tienen ningún punto en común.
- Dos rectas son **coincidentes** si tienen la **misma pendiente** y la **misma ordenada en el origen**. Todos sus puntos son comunes.
- Dos rectas son **secantes** si tienen **distinta pendiente**. Tienen un único punto en común

Ecuación punto-pendiente de la recta.

Dados un punto $P(x_0, y_0)$ y una pendiente m , la ecuación de la recta que pasa por P y tiene por pendiente m es:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

8. Obtén la ecuación de la recta que pasa por los siguientes pares de puntos.

a) $A(1, 5)$ y $B(-3, -15)$

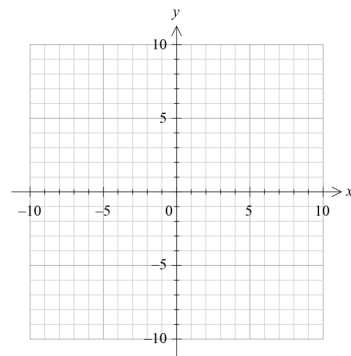
b) $A(-1, -1)$ y $B(0, 2)$

c) $A(1, 1)$ y $B(1, 2)$

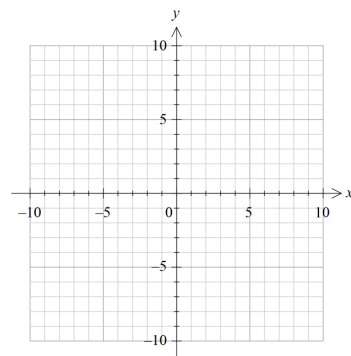
d) $A(1, 1)$ y $B(-1, 2)$

9. Dibuja en unos ejes de coordenadas las gráficas de las siguientes funciones.

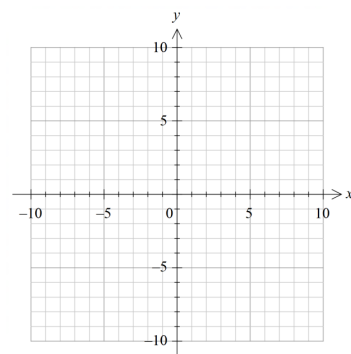
a) Una función lineal de pendiente negativa.



b) Una función lineal de pendiente positiva y ordenada en el origen negativa.



c) Una función lineal cuya ordenada en el origen sea nula.



10. Escribe la ecuación de la recta que cumple las condiciones de cada uno de los siguientes casos.

- a) Pasa por $A(0, 0)$ y tiene de pendiente $m = 3$

- b) Pasa por $A(6, 6)$ y tiene de pendiente $m = -2$.

- c) Pasa por $A(0, 1)$ y tiene de pendiente $m = 5$.

- d) Pasa por $A(2, 3)$ y tiene de pendiente $m = -1$.

11. Halla la ecuación de una recta que sea paralela a la recta $y = 2x - 5$ y que cumpla la condición pedida en cada caso.

- a) Pasa por el punto $A(1, 2)$.

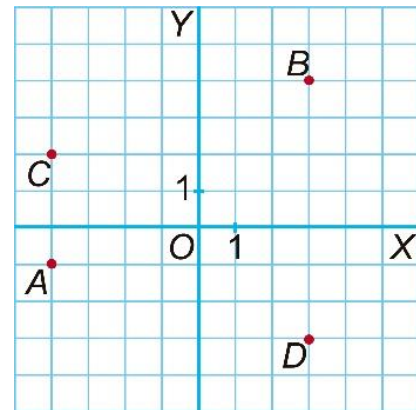
- b) Su ordenada en el origen es 8

- c) Pasa por el punto $B(0, 3)$.

- d) Su ordenada en el origen es -5 .

12. Observa la figura y resuelve las siguientes cuestiones.

a) Calcula la recta que pasa por los puntos A y B .



b) Calcula la recta que pasa por los puntos C y D .

c) ¿Cuál es la posición relativa de ambas rectas?

13. Estudia la posición relativa de las siguientes rectas sin representarlas.

r: $y = 3x$

s: $y = -3x + 1$

t: $y = 3x + 2$

14. Dada la recta de ecuación $y = -3x + 2$, indica si los siguientes puntos pertenecen o no a dicha recta.

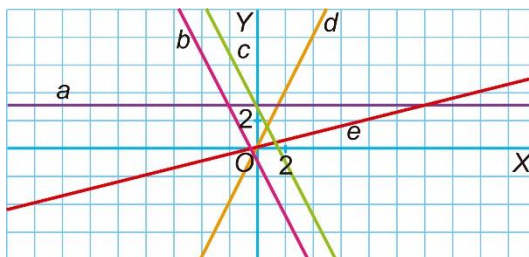
a) $A(2, 7)$

b) $B(0, 2)$

c) $C(1, -1)$

d) $D(-3, 2)$

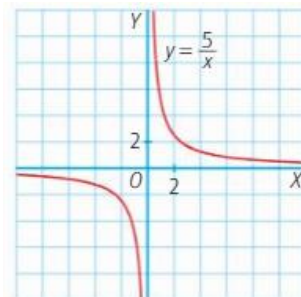
15. Observa la siguiente figura e indica si hay algún par de rectas que sean paralelas entre sí. ¿Existe alguna recta paralela al eje X o al eje Y ?



OTRAS FUNCIONES

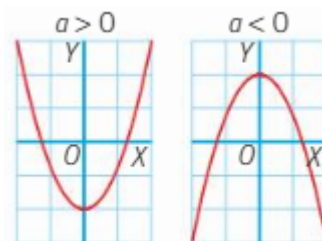
Función de proporcionalidad inversa

- Las funciones que relacionan dos magnitudes inversamente proporcionales se llaman **funciones de proporcionalidad inversa**. Son de la forma $y = \frac{k}{x}$, donde k es la **constante de proporcionalidad inversa** y x nunca puede tomar el valor cero, $x \neq 0$.
- Las gráficas de las funciones de proporcionalidad inversa se denominan **hipérbolas**. Tienen las siguientes características:
 - Para valores de x positivos y cada vez mayores, la gráfica se va acercando al eje X , sin llegar a cortarlo. Lo mismo ocurre para valores de x negativos y cada vez menores.
 - Si x toma valores cercanos a 0, la función se acerca al eje Y sin llegar a cortarlo.
 - No tiene puntos de corte con el eje X ni con el eje Y .
 - La función es creciente o decreciente dependiendo del signo de la constante k
 - Si $k > 0$, la función es decreciente.
 - Si $k < 0$, la función es creciente.



Funciones cuadráticas

- La ecuación de una **función cuadrática** es $y = ax^2 + bx + c$, donde a, b, c son números cualesquiera y a no es nulo, $a \neq 0$.
- Las gráficas de las funciones cuadráticas se denominan **parábolas**. Tienen las siguientes características:
 - Tienen un máximo o mínimo absoluto, que se llama **vértice** de la parábola.
 - Tienen un eje de simetría vertical, que pasa por el vértice.
 - Tienen un punto de corte con el eje Y , y pueden tener dos, uno o ningún punto de corte con el eje X .
 - La abertura de sus ramas depende del signo de a :
 - Si $a > 0$, las ramas se abren hacia arriba.
 - Si $a < 0$, las ramas se abren hacia abajo.



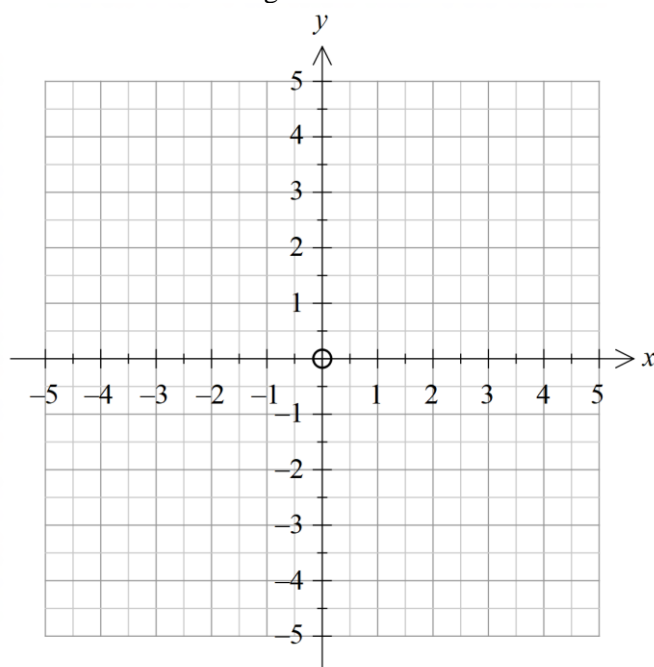
16. Dos magnitudes x e y son inversamente proporcionales, y el valor de su constante k de proporcionalidad inversa es 2.

a) Escribe la ecuación de la función

b) Construye una tabla de valores, dando a x cinco valores positivos y cinco valores negativos.

x										
y										

c) A partir de los datos de la tabla esboza la gráfica de la función.



17. Escribe las coordenadas del vértice y de los puntos de corte con los ejes de cada parábola.

<p>a)</p>	<p>b)</p>	<p>c)</p>

18. Indica hacia dónde se abren las ramas de las siguientes parábolas, sin representarlas.

a) $y = 3x^2 - 5x$

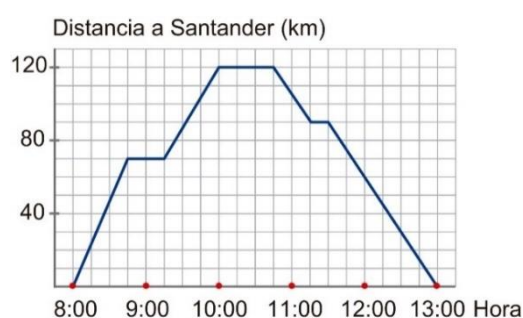
b) $y = -2x^2 + 7x + 1$

c) $y = 3x - 5x^2 + 2$

d) $y = 6 - x - x^2$

19. Un autobús realiza un viaje de ida y vuelta desde Santander. En el eje Y se representa la distancia a Santander (en kilómetros) y en el eje X el tiempo transcurrido (en horas).

- ¿Cuántas horas emplea el autobús en llegar a su destino? ¿A qué hora llega?
- ¿Cuántas horas emplea en regresar, es decir, el tiempo empleado desde que sale de su destino?
- ¿Cuántas veces ha parado, a qué hora, y durante cuánto tiempo?
- ¿Cuántos kilómetros llevaba el autobús recorridos a las 9:00? ¿Y a las 11:30?



20. Un mecánico de electrodomésticos cobra a razón de 20 € por su desplazamiento y 10 € por cada hora de trabajo.

- Obtén la ecuación de la función que expresa el precio pagado por el cliente en función del número de horas trabajadas.
- ¿Cuánto debe pagar un cliente si el técnico trabaja 2 horas y media?
- Si un cliente paga 50 €, ¿cuántas horas ha trabajado el técnico?

21. Un motorista se desplaza a una velocidad constante de 50 Km/h.

a) Escribe la ecuación de la función que relaciona el espacio recorrido con el tiempo.

b) ¿Qué tipo de función es?

c) Representa gráficamente la función anterior.

d) ¿Cuánto tiempo tarda en recorrer 300 Km?

22. Dos empresas de transporte escolar, *A* y *B*, ofrecen su servicio según las tarifas que se recogen en la siguiente tabla.

	Término fijo (€)	Término variable (€/alumno)
Empresa A	80	5,55
Empresa B	125	3,30

a) Halla la expresión del precio en función del número de alumnos para cada empresa.

b) Si queremos hacer una excursión con 60 alumnos, ¿cuál de las dos empresas resulta más económica?

23. Dos depósitos de agua, A y B , funcionan de la siguiente manera: a medida que A se va vaciando, B se va llenando. En la siguiente figura se representan las gráficas que reflejan la cantidad de agua que contiene cada depósito (litros) a medida que pasa el tiempo (horas).

- Indica cuál es la gráfica de cada depósito.
- Escribe las expresiones de las funciones representadas.
- ¿En qué momento los dos depósitos contienen la misma cantidad de agua?
- ¿Cuántas horas tarda en vaciarse el depósito A ?

